Chapitre D

# Analyse spectrale

## D.1. Opérateurs

**D.1.1. Définitions et notations.** On se donne dans toute la suite deux espaces de Banach $E$ et $F$. On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace des applications linéaires continues de $E$ dans $F$.

**Définition D.1.1.** *Un opérateur (ou encore opérateur non borné, terminologie courante mais pas très bien choisie !) est une application linéaire $T$ définie sur un sous-espace vectoriel $D(T) \subset E$ à valeurs dans $F$. L'espace $D(T)$ est le domaine de l'opérateur. On dit que $T$ est borné si $D(T) = E$ et si $T : E \to F$ est continue, autrement dit s'il existe $C > 0$ telle que*

$$\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E \quad \forall x \in E\,.$$

*Si $T_1$ et $T_2$ sont deux opérateurs de domaines respectifs $D(T_1)$ et $D(T_2)$, on dit que $T_2$ est une extension de $T_1$ si $D(T_1) \subset D(T_2)$ et si $T_2$ coïncide avec $T_1$ sur $D(T_1)$.*

**Exemples.** On pose $E = F = L^2(\mathbb{R})$ et on considère l'application $T$ de domaine $D(T) = H^1(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall f \in D(T)\,, \quad Tf = f'\,.$$

Alors $T$ est non borné sur $E$ car $D(T) \neq E$. En revanche si $E = H^1(\mathbb{R})$ alors $T$ est borné car

$$\|Tf\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{H^1(\mathbb{R})}\,.$$

On dit que $T$ est à domaine dense si $\overline{D(T)} = E$. On note

$$\operatorname{Gr} T := \bigcup_{x \in D(T)} (x, Tx) \quad \text{le graphe de } T\,;$$

$$\operatorname{Im} T := \bigcup_{x \in D(T)} Tx \quad \text{l'image de } T\,;$$

$$\operatorname{Ker} T := \big\{x \in D(T) \,/\, Tx = 0\big\} \quad \text{le noyau de } T\,.$$

On dit que $T$ est fermé si son graphe est un fermé de $E \times F$ (ou de manière équivalente si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $D(T)$ convergeant vers $x \in E$ telle que $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $y$ on a $x \in D(T)$ et $y = Tx$). Si $T$ est un opérateur à domaine dense, on définit le sous-espace vectoriel $D(T^*)$ de $F^*$ par

$$D(T^*) := \Big\{ f \in F^* \,/\, x \in D(T) \longmapsto \langle f, Tx\rangle_{F^*,F} \text{ est continue} \\ \text{au sens où} \quad \big|\langle f, Tx\rangle_{F^*,F}\big| \leq C\|x\|_E \Big\}\,.$$

Pour tout $f \in D(T^*)$ on définit l'application $g : D(T) \to \mathbb{R}$

$$\forall x \in D(T)\,, \quad g(x) := \langle f, Tx\rangle_{F^*,F}\,.$$

Cette application est linéaire continue, et comme $D(T)$ est dense et $\mathbb{R}$ est complet on peut prolonger $g$ à $E$ tout entier en une application linéaire continue $g \in E^*$ (sans invoquer la densité ni la complétude on peut appliquer le théorème de Hahn-Banach). Ce prolongement est unique par densité de $D(T)$ puisque $g$ est continue. On définit alors l'opérateur $T^*$ sur $D(T^*)$, à valeurs dans $E^*$, par $T^*f := g$.

**Définition D.1.2** (Adjoint d'un opérateur)**.** *Soit $T$ un opérateur à domaine dense. L'adjoint de $T$, noté $T^*$, est l'unique opérateur linéaire de domaine*

$$D(T^*) := \Big\{ f \in F^* \,/\, x \in D(T) \longmapsto \langle f, Tx\rangle_{F^*,F} \text{ est continue} \Big\}$$

*à valeurs dans $E^*$ défini par*

$$\forall f \in D(T^*)\,,\ \forall x \in D(T)\,, \quad \langle T^*f, x\rangle_{E^*,E} = \langle f, Tx\rangle_{F^*,F}\,.$$

**Exemple.** On pose $E = F = L^2(\mathbb{R})$ et on considère l'application $T$ de domaine $D(T) = H^1(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall f \in D(T)\,, \quad Tf = f' + f\,.$$

L'espace $H^1(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ et on a $D(T^*) = H^1(\mathbb{R})$ et

$$T^*f = -f' + f\,.$$

En effet on voit facilement que si $f \in H^1(\mathbb{R})$ alors

$$|\langle f, g + g'\rangle| = |\langle -f' + f, g\rangle| \le \big(\|f\|_{L^2} + \|f'\|_{L^2}\big)\|g\|_{L^2}$$

et inversement en considérant le crochet au sens des distributions on a

$$f \in D(T^*) \Rightarrow \exists C > 0\,, \quad \forall g \in L^2(\mathbb{R})\,, \quad |\langle f', g\rangle| \le C\|g\|_{L^2}$$

ce qui implique que $f' \in L^2(\mathbb{R})$.

Si $A$ est un sous-ensemble de $E$ on définit son orthogonal

$$A^\perp := \Big\{ f \in E^*, /\, \langle f, x\rangle_{E^*,E} = 0 \quad \forall x \in A \Big\}\,.$$

De même si $B$ est un sous-ensemble de $E^*$ on définit son orthogonal

$$B^\perp := \Big\{ x \in E \,/\, \langle f, x\rangle_{E^*,E} = 0 \quad \forall f \in B \Big\}\,.$$

**Exercice.** Soit $M$ un sous-espace vectoriel de $E$ et $N$ un sous-espace vectoriel de $E^*$. Alors

$$(M^\perp)^\perp = \overline{M} \quad \text{et} \quad \overline{N} \subset (N^\perp)^\perp\,.$$

Si $E$ est réflexif alors $\overline{N} = (N^\perp)^\perp$. Plus généralement $(N^\perp)^\perp$ est l'adhérence de $N$ pour la topologie faible $*$.

**Proposition D.1.3.** *Soit $T : D(T) \subset E \to F$ un opérateur linéaire non borné, à domaine dense. Alors $T^*$ est fermé.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que si $f_n \in D(T^*)$ est une suite convergeant vers $f$ dans $F^*$ et si $T^*f_n$ converge vers $g$ dans $E^*$ alors pour tout $x \in D(T)$

$$\langle f, Tx\rangle - \langle g, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \big(\langle f_n, Tx\rangle - \langle T^*f_n, x\rangle\big) = 0$$

et donc pour tout $x \in D(T)$

$$\big|\langle f, Tx\rangle\big| \le \|g\|_{E^*}\|x\|_E$$

donc $f \in D(T^*)$ et $T^*f = g$. □

**Remarque.** Si $T$ est borné alors $D(T^*) = F^*$ et $T^*$ est borné avec

$$\|T^*\|_{\mathcal{L}(F^*,E^*)} = \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}\,.$$

Il peut arriver que $D(T^*)$ ne soit pas dense dans $F^*$, même si $T$ est fermé.

La proposition suivante est à démontrer à titre d'exercice.

**Proposition D.1.4.** *Soit $T : E \to F$ un opérateur linéaire continu, fermé. Alors on a*

$$Ker T = (Im T^*)^\perp\,, \quad Ker T^* = (Im T)^\perp\,, \quad \overline{Im T^*} \subset (Ker T)^\perp\,, \quad \overline{Im T} = (Ker T^*)^\perp$$

*On a de plus*

$$Im T \text{ fermé} \iff Im T^* \text{ fermé} \iff Im T = (Ker T^*)^\perp \iff Im T^* = (Ker T)^\perp\,.$$

### D.1.2. Opérateurs de rang fini et opérateurs compacts.

**Définition D.1.5** (Opérateur de rang fini)**.** *On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est de rang fini si la dimension de son image $Im T$ est finie.*

**Définition D.1.6** (Opérateur compact)**.** *On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est compact si l'image par $T$ de la boule unité fermée $B_E$ de $E$ est relativement compacte dans $F$ pour la topologie forte.*

**Proposition D.1.7.** *L'ensemble $\mathcal{K}(E, F)$ des opérateurs compacts de $E$ dans $F$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E, F)$. Il contient l'adhérence des opérateurs continus de rang fini.*

Démonstration. Le fait que $\mathcal{K}(E, F)$ soit un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$ est clair, montrons qu'il est fermé. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs compacts convergeant en norme vers un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Comme $F$ est complet, il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $T(B_E)$ peut être recouvert par un nombre fini de boules de taille $\varepsilon$. Soit $n$ tel que

$$\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Comme $T_n(B_E)$ est relativement compacte, il existe un ensemble fini $I$ et une famille $(y_i)_{i\in I}$ de $F$ tels que

$$\overline{T_n(B_E)} \subset \bigcup_{i\in I} B(y_i, \frac{\varepsilon}{2})\,,$$

et on conclut par l'inégalité triangulaire que

$$\overline{T(B_E)} \subset \bigcup_{i\in I} B(y_i, \varepsilon)\ \,,$$

d'où le résultat.

Le second résultat provient simplement du fait que les opérateurs de rang fini sont compacts, donc les limites dans $\mathcal{L}(E, F)$ des opérateurs de rang fini sont compacts. □

**Remarque.** Il peut arriver que l'adhérence des opérateurs continus de rang fini soit distincte de $\mathcal{K}(E, F)$. Un premier exemple a été donné en 1972, en renvoie à [**2**] pour des détails.

**Proposition D.1.8.** *Dans le cas où $F$ est un espace de Hilbert, tout opérateur compact de $\mathcal{K}(E, F)$ peut s'écrire comme une limite d'opérateurs de $\mathcal{L}(E, F)$ de rang fini.*

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{K}(E, F)$ et $\varepsilon > 0$. Comme $K := \overline{T(B_E)}$ est compact, il existe un ensemble fini $I$ et une famille $(y_i)_{i\in I}$ de $F$ tels que

$$K \subset \bigcup_{i\in I} B(y_i, \varepsilon)\,.$$

Soit $G$ l'espace vectoriel engendré par $\{y_i,\ i \in I\}$ et soit $p_G$ la projection orthogonale sur $G$. Alors $p_G$ est un operateur continu de rang fini. On sait que pour tout $x \in B_E$ il existe $i \in I$ tel que

$$\|Tx - y_i\| \leq \varepsilon$$

et donc

$$\|p_G Tx - Tx\| \leq 2\varepsilon\,.$$

La proposition est démontrée. □

**Exercice.** La composée d'un opérateur compact et d'un opérateur continu (et réciproquement) est compacte.

**Théorème D.1.9** (Théorème de Schauder)**.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach. Alors $T$ appartient à $\mathcal{K}(E,F)$ si et seulement si $T^*$ appartient à $\mathcal{K}(F^*,E^*)$.*

Démonstration. Supposons que $T$ appartient à $\mathcal{K}(E,F)$ et montrons que $\overline{T^*(B_{F^*})}$ est compacte dans $E^*$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $B_{F^*}$ et montrons que $(T^*f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite convergente. En notant

$$K := \overline{T(B_E)} \quad \text{et} \quad H := \Big\{\varphi_n : z \in K \longmapsto \varphi_n(z) := \langle f_n, z\rangle\Big\}$$

on remarque que $K$ est un espace métrique compact dans $F$ et que la famille $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui constitue $H$ est équicontinue sur $K$ donc par le théorème d'Ascoli il existe une sous-suite $(\varphi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et une fonction continue $\varphi \in C(K)$ telles que $\varphi_{n_k}$ converge uniformément dans $K$ vers $\varphi$ quand $k$ tend vers l'infini. En particulier on a

$$\sup_{x\in B_E} \big|\langle f_{n_k} - f_{n_j}, Tx\rangle\big| \longrightarrow 0\,, \quad j,k \to \infty\,.$$

La suite $(T^*f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans $E^*$, donc elle converge dans $E^*$. On en déduit que l'ensemble $T^*(B_{F^*})$ est relativement compact.

Inversement supposons que $T^*$ appartient à $\mathcal{K}(F^*,E^*)$, alors on sait que $T^{**}$ appartient à $\mathcal{K}(E^{**},F^{**})$ et donc $T^{**}(B_E)$ est d'adhérence compacte dans $F^{**}$. Mais $T(B_E) = T^{**}(B_E)$ (car $T^{**}_{|E} = T$) et $F$ est fermée dans $F^{**}$ (on rappelle la Proposition A.3.3) donc $T(B_E)$ est d'adhérence compacte dans $F$. D'où le théorème. □

**D.1.3. Alternative de Fredholm.** Commençons par démontrer le théorème suivant, qui caractérise les espaces de dimension finie.

**Théorème D.1.10** (Théorème de Riesz (1880-1956))**.** *Soit $E$ un espace vectoriel normé. La boule unité fermée $B_E$ est compacte si et seulement si $E$ est de dimension finie.*

Démonstration. Le résultat repose sur le lemme suivant, démontré plus bas.

**Lemme D.1.11.** *Soit $E$ un espace vectoriel normé. Si $M \subset E$ est un sous-espace strict fermé de $E$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x \in E$ tel que*

$$\|x\|_E = 1 \quad \textit{et} \quad d(x,M) \geq 1 - \varepsilon\,.$$

Supposons que $E$ soit de dimension infinie. Alors on construit par récurrence (en commençant par un vecteur $x_0 \in E$ unitaire arbitraire) une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle qu'en notant $E_n$ l'espace vectoriel (de dimension finie donc fermé) engendré par $(x_k)_{k\leq n}$ on ait

$$\|x_n\|_E = 1\,, \quad \text{et} \quad d(x_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}\,.$$

En particulier on a

$$\forall m < n\,, \quad \|x_n - x_m\|_E \geq \frac{1}{2}$$

donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet aucune sous-suite convergente. Donc $B_E$ n'est pas compact ce qui est une contradiction. D'où le théorème. $\square$

Démonstration du Lemme D.1.11. Soit $y \in E \setminus M$ et $\varepsilon > 0$. Comme $M$ est fermé on sait que

$$d(y, M) > 0$$

donc il existe $y' \in M$ tel que

$$d(y, M) \leq \|y - y'\| \leq \frac{d(y, M)}{1-\varepsilon} \cdot$$

Soit alors

$$x := \frac{y - y'}{\|y - y'\|_E} \cdot$$

Soit $z \in M$, montrons que $\|x - z\|_E \geq 1 - \varepsilon$. On a

$$\begin{aligned} x - z &= \frac{y - y'}{\|y - y'\|_E} - z \\ &= \frac{1}{\|y - y'\|_E}(y - y' - z\|y - y'\|_E) \\ &= \frac{1}{\|y - y'\|_E}(y - (y' + z\|y - y'\|_E)) \end{aligned}$$

et comme $y' + z\|y - y'\|_E$ appartient à $M$ il vient

$$\|x - z\|_E \geq \frac{d(y, M)}{\|y - y'\|_E} \geq 1 - \varepsilon$$

d'où le résultat. $\square$

**Théorème D.1.12** (Alternative de Fredholm (1866-1927))**.** *Soit $E$ un espace de Banach et $T \in \mathcal{K}(E)$ un opérateur compact de $E$ dans lui-même. Alors*

*a) $Ker(Id - T)$ est de dimension finie.*

*b) $Im(Id - T)$ est fermée et $Im(Id - T) = Ker(Id - T^*)^\perp$.*

*c) L'opérateur $Id - T$ est injectif si et seulement si il est surjectif.*

*d) $\dim Ker(Id - T) = \dim Ker(Id - T^*)$.*

**Remarques.** Ce résultat concerne la résolution de l'équation $u - Tu = f$ et indique que
– soit pour tout $f \in E$ il existe une unique solution dans $E$
– soit $u - Tu = 0$ a $n$ solutions linéairement indépendantes et l'équation $u - Tu = f$ a une solution si et seulement si $f$ vérifie $n$ conditions d'orthogonalité.

Le même résultat est vrai pour l'opérateur $\lambda\mathrm{Id} - T$ puisque $\lambda^{-1}T$ est compact.

Démonstration. a) Notons $K_0 := \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id}-T)$. On a $B_{K_0} = T(B_{K_0}) \subset T(B_E)$ donc $B_{K_0}$ est compacte, et par le théorème de Riesz on en déduit que $K_0$ est de dimension finie.

b) D'après la Proposition D.1.4, pour montrer que $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id} - T) = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - T^*)^\perp$ il suffit de montrer que $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id} - T)$ est fermée. Soit donc une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $y$ et telle qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E$ telle que

$$y_n = x_n - Tx_n\,.$$

Montrons que $y \in \mathrm{Im}\,(\mathrm{Id} - T)$. Notons

$$d_n := d(x_n, \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - T))$$

et montrons tout d'abord que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Supposons qu'il existe une sous-suite, que nous noterons toujours $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que

$$d_n \longrightarrow \infty\,.$$

Comme $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}-T)$ est de dimension finie il existe $x'_n$ dans $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}-T)$ tel que

$$d_n = \|x_n - x'_n\|_E\,.$$

Soit alors $z_n := \dfrac{x_n - x'_n}{d_n}$, on a

$$d\big(z_n, \operatorname{Ker}(\mathrm{Id}-T)\big) = \frac{1}{d_n} d\big(x_n, \operatorname{Ker}(\mathrm{Id}-T)\big) = 1$$

et

$$z_n - Tz_n = \frac{y_n}{d_n} \longrightarrow 0\,.$$

Comme $T$ est compact, quitte à extraire à nouveau une sous-suite il existe $z$ tel que

$$Tz_n \longrightarrow z$$

et donc comme $z_n - Tz_n \longrightarrow 0$, on a

$$z_n \longrightarrow z\,.$$

Mais alors $z \in \operatorname{Ker}\big(\mathrm{Id}-T\big)$ et $d\big(z, \operatorname{Ker}\big(\mathrm{Id}-T\big)\big) = 1$, ce qui est absurde.

La suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée et comme $T$ est compact, quitte à extraire une sous-suite il existe $x$ tel que

$$T(x_n - x'_n) \longrightarrow x \quad \text{et} \quad x_n - x'_n \longrightarrow y + x$$

puisque $y_n = x_n - x'_n - T(x_n - x'_n)$. Et on a alors

$$y = (y+x) - T(y+x) \in \operatorname{Im}(\mathrm{Id}-T)\,.$$

c) Supposons que $\mathrm{Id}-T$ est injectif mais pas surjectif et soit la suite

$$E_n := (\mathrm{Id}-T)^n(E)\,.$$

Comme $\mathrm{Id}-T$ n'est pas surjectif, $E_1$ est un sous-espace strict de $E$. Par ailleurs $E_1$ est stable par $T$. De même on montre que $E_2$ est un sous-espace strict de $E_1$ car $\mathrm{Id}-T$ est injectif et pas surjectif, et par récurrence on obtient que $E_{n+1}$ est un sous-espace de $E_n$, et l'inclusion est stricte car $\mathrm{Id}-T$ est injectif et pas surjectif. Par ailleurs par la propriété b), comme la restriction de $T$ à $E_n$ est un opérateur compact de $E_n$, l'image $E_{n+1}$ de $(\mathrm{Id}-T)_{|E_n}$ est fermée. La suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite strictement décroissante de sous-espaces fermés et par le Lemme D.1.11 il existe donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$x_n \in E_n\,, \quad \|x_n\|_E = 1 \quad \text{et} \quad d(x_n, E_{n+1}) \geq \frac{1}{2}\,\cdot$$

Soient alors $n$ et $m$ tels que $n > m$, on a

$$T(x_n - x_m) = \Big((x_m - Tx_m) - (x_n - Tx_n) + x_n\Big) - x_m$$

et comme $(x_m - Tx_m) - (x_n - Tx_n) + x_n \in E_{m+1}$ il vient

$$\|T(x_n - x_m)\|_E \geq \frac{1}{2}$$

ce qui est absurde car $T$ est compact. Donc $\mathrm{Id}-T$ est surjectif.

La réciproque s'obtient en appliquant le raisonnement précédent à $T^*$ en utilisant les résultats de la Proposition D.1.4.

d) Définissons $d := \dim \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - T)$ et $d^* := \dim \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - T^*)$. On commence par remarquer que si $\dim E = d$ alors $\operatorname{Im}(\mathrm{Id} - T) = \{0\}$ donc $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - T^*)^\perp = \{0\}$ et le résultat est vrai. Supposons maintenant que $d < d^*$. Comme $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - T)$ est de dimension finie, il admet un supplémentaire topologique dans $E$.[1] On définit alors $p$ projecteur continu de $E$ sur $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - T)$. Comme $\operatorname{Im}(\mathrm{Id} - T) = \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - T^*)^\perp$ est de codimension finie $d^*$, il admet un supplémentaire topologique dans $E$, noté $\tilde{E}$, de dimension $d^*$[2]. Comme $d < d^*$, il existe une application linéaire $\ell : \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - T) \to \tilde{E}$ injective et non surjective. Soit alors

$$B := T + \ell \circ p$$

opérateur compact sur $E$ puisque $\ell \circ p$ est de rang fini. Soit $x \in \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - B)$, alors

$$0 = x - Bx = (x - Tx) - \ell(px)$$

donc

$$x - Tx = 0 \quad \text{et} \quad \ell(px) = 0$$

donc $x \in \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - T)$ et $px = 0$ car $\ell$ est injective donc $x = 0$.

D'après la propriété c) appliquée à $B$ on a $\operatorname{Im}(\mathrm{Id} - B) = E$. Mais c'est impossible car il existe $y \in \tilde{E} \setminus \operatorname{Im} \ell$ et pour un tel $y$ l'équation $x - Bx = y$ n'admet pas de solution. Donc $d \geq d^*$.

En appliquant ce résultat à $T^*$ on trouve

$$\dim \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - T^{**}) \leq \dim \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - T^*) \leq \dim \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - T) .$$

Mais on constate facilement que $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - T) \subset \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - T^{**})$ donc $d = d^*$. Le théorème est démontré. □

### D.1.4. Spectre d'opérateurs : définitions et premières propriétés.

**Définition D.1.13.** *Soit $E$ un espace de Banach sur $\mathbb{C}$ et $T \in \mathcal{L}(E)$. Le spectre de $T$, noté $\sigma(T)$, est le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble résolvant*

$$\rho(T) := \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \,/\, T - \lambda Id \text{ est bijectif de } E \text{ sur } E\Big\} .$$

*On dit que $\lambda$ est valeur propre de $T$ si*

$$Ker(T - \lambda Id) \neq \{0\} .$$

*L'ensemble des valeurs propres de $T$ est appelé le spectre ponctuel de $T$ et noté $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$, et l'ensemble des valeurs propres isolées de multiplicité finie est appelé le spectre discret $\sigma_{\mathrm{d}}(T)$. On définit enfin le rayon spectral*

$$r(T) := \sup \Big\{|\lambda| \,,\ \lambda \in \sigma(T)\Big\} .$$

**Remarques.** Par le théorème de l'application ouverte A.1.15, si $\lambda \in \rho(T)$ alors l'application $\lambda \longmapsto R(\lambda) := (\lambda \mathrm{Id} - T)^{-1}$ est continue de $E$ dans $E$. On appelle résolvante cette application.

Les valeurs propres de $T$ sont dans le spectre de $T$ mais en général l'inclusion est stricte.

**Exemple.** Sur $E = \ell^2(\mathbb{N})$ on introduit le décalage à droite $S$ défini par $S((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) := (0, u_0, u_1, \dots)$. Alors $S$ est injectif mais pas surjectif, donc $0 \in \sigma(S)$ mais $0 \notin \sigma_{\mathrm{p}}(S)$.

1. En effet si on note $\varphi_i$ l'application qui à $x \in \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - T)$ associe la $i$ème coordonnée de $x$ dans une base de $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - T)$ alors par Hahn-Banach on peut prolonger $\varphi_i$ à $E$ tout entier et l'intersection des $\varphi_i^{-1}(\{0\})$ convient.

2. On rappelle que $\operatorname{codim} A = \dim E_{/A}$ est la dimension de tout supplémentaire topologique de $A$. En outre si $N$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $E^*$ alors $\dim N = \operatorname{codim} N^\perp$.

On peut également définir d'autres sous-ensembles de $\sigma(T)$, dont on ne se servira pas ici : le spectre essentiel est

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(T) := \left\{ \begin{array}{l} \lambda \in \mathbb{C} \,/\, \text{soit } \dim \operatorname{Ker}(T - \lambda \mathrm{Id}) = \infty \\ \qquad\qquad \text{soit } \operatorname{Im}(T - \lambda \mathrm{Id}) \text{ est fermée et } \operatorname{codim} \operatorname{Im}(T - \lambda \mathrm{Id}) \neq \dim \operatorname{Ker}(T - \lambda \mathrm{Id}) \\ \qquad\qquad \text{soit } \operatorname{Im}(T - \lambda \mathrm{Id}) \text{ n'est pas fermée} \end{array} \right\}.$$

On remarque que $\sigma_{\mathrm{ess}}(T) \cup \sigma_{\mathrm{p}}(T) = \sigma(T)$ : si $\lambda$ appartient ni à $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$ ni à $\sigma_{\mathrm{ess}}(T)$ alors on a $\dim \operatorname{Ker}(T - \lambda \mathrm{Id}) = 0$ donc $\operatorname{Im}(T - \lambda \mathrm{Id})$ est fermée et $\operatorname{codim} \operatorname{Im}(T - \lambda \mathrm{Id}) = 0$ donc $\lambda \in \rho(T)$. On peut montrer que $\sigma_{\mathrm{ess}}(T)$ est stable par perturbation compacte. La réunion $\sigma_{\mathrm{ess}}(T) \cup \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ n'est pas forcément disjointe. Enfin le spectre continu est

$$\sigma_{\mathrm{c}}(T) := \left\{ \lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(T) \setminus \sigma_{\mathrm{p}}(T) \ / \ \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda \mathrm{Id})} = E \right\},$$

et le spectre résiduel est

$$\sigma_{\mathrm{res}}(T) := (\sigma_{\mathrm{ess}}(T) \setminus \sigma_{\mathrm{p}}(T)) \setminus \sigma_{\mathrm{c}}(T).$$

**Proposition D.1.14.** *Soit $E$ un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$. Le spectre de $T$ est compact et on a l'inclusion*

$$\sigma(T) \subset \overline{B(0, \|T\|)}. \tag{D.1}$$

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > \|T\|$. On remarque que l'équation

$$x = \frac{1}{\lambda}(Tx - f)$$

admet une solution unique pour tout $f \in E$ grâce au théorème de point fixe de Picard et $x$ est solution de $Tx - \lambda x = f$. Donc $T - \lambda \mathrm{Id}$ est bijectif.

Montrons maintenant que $\sigma(T)$ est fermé, ou de manière équivalente que $\rho(T)$ est ouvert. Soit donc $\lambda_0 \in \rho(T)$ et montrons que pour $\lambda$ suffisamment proche de $\lambda_0$ et pour tout $f \in E$ il existe une solution à

$$Tx - \lambda x = f.$$

Il suffit d'écrire cette équation sous la forme

$$x = (T - \lambda_0 \mathrm{Id})^{-1}(f + (\lambda - \lambda_0)x)$$

qui se résout à nouveau grâce au théorème de point fixe de Picard, dès que

$$|\lambda - \lambda_0| \, \|(T - \lambda_0 \mathrm{Id})^{-1}\| < 1.$$

La proposition est démontrée. □

**Proposition D.1.15.** *Soit $E$ un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\varphi \in E^*$. Alors la fonction $f$ définie sur $\mathbb{C}$ par*

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad f(\lambda) := \varphi((T - \lambda Id)^{-1})$$

*et à valeurs dans $E^*$ est holomorphe dans $\rho(T)$. De plus la fonction $F$ définie sur $\rho(T)$ par*

$$\forall \lambda \in \rho(T), \quad F(\lambda) := \lambda f(\lambda)$$

*à valeurs dans $E^*$ est bornée quand $|\lambda| \to \infty$.*

Démonstration. Soit $\lambda \in \rho(T)$, qui est ouvert, et soit $\lambda_0 \in \rho(T)$ tel que

$$|\lambda - \lambda_0| \|(T - \lambda \mathrm{Id})^{-1}\| < \frac{1}{2}.$$

Montrons que

$$\|(T-\lambda_0\mathrm{Id})^{-1}-(T-\lambda\mathrm{Id})^{-1}+(\lambda-\lambda_0)(T-\lambda\mathrm{Id})^{-2}\|\leq C|\lambda-\lambda_0|^2 \tag{D.2}$$

où $C$ dépend de $T$ et de $\lambda$. En effet on commence par constater que pour tout $A\in\mathcal{L}(E)$ de norme strictement plus petite que 1

$$\|(\mathrm{Id}+A)^{-1}-\mathrm{Id}+A\|\leq\frac{\|A\|^2}{1-\|A\|}$$

car

$$(\mathrm{Id}+A)^{-1}-\mathrm{Id}+A=A^2\sum_{n\geq 0}(-1)^nA^n\,.$$

On applique cette inégalité à $A=B^{-1}C$ avec $B$ inversible et $C$ vérifiant

$$\|C\|\|B^{-1}\|<1\,.$$

Alors $B+C=B(\mathrm{Id}+B^{-1}C)$ est inversible et l'inégalité précédente peut se transformer en

$$\|(B+C)^{-1}-B^{-1}+B^{-1}CB^{-1}\|\leq\frac{\|C\|^2\|B^{-1}\|^3}{1-\|C\|\|B^{-1}\|}\,.$$

Le résultat (D.2) suit en appliquant cette inégalité à $B=T-\lambda\mathrm{Id}$ et $C=(\lambda-\lambda_0)\mathrm{Id}$. On a alors

$$\lim_{\lambda_0\to\lambda}(\lambda_0-\lambda)^{-1}\big((T-\lambda_0\mathrm{Id})^{-1}-(T-\lambda\mathrm{Id})^{-1}\big)=(T-\lambda\mathrm{Id})^{-2}$$

dans $E$, et donc en appliquant $\varphi$ aux deux membres de l'égalité on trouve

$$\lim_{\lambda_0\to\lambda}(\lambda_0-\lambda)^{-1}(f(\lambda_0)-f(\lambda))=\varphi\big((T-\lambda\mathrm{Id})^{-2}\big)\,.$$

Donc $f$ a une dérivée première continue dans $\rho(T)$, elle y est donc holomorphe. En outre

$$\lambda(T-\lambda\mathrm{Id})^{-1}=-\mathrm{Id}+\sum_{n\geq 1}\lambda^{-n}T^n$$

donc $F(\lambda):=\lambda f(\lambda)=\varphi(\lambda(T-\lambda\mathrm{Id})^{-1})$ tend vers $\varphi(-\mathrm{Id})$ quand $|\lambda|\to\infty$, et donc elle est bornée. □

**Proposition D.1.16.** *Soit $E$ un espace de Banach et $T\in\mathcal{L}(E)$. On a*

$$r(T)=\liminf_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\,. \tag{D.3}$$

Démonstration. On constate que $\left\{\lambda^n\,|\,\lambda\in\sigma(T)\right\}\subset\sigma(T^n)$ : en effet si

$$(T^n-\lambda^n\mathrm{Id})x=f$$

alors

$$(T-\lambda\mathrm{Id})(T^{n-1}+\cdots+\lambda^{n-1}\mathrm{Id})x=f$$

donc $\rho(T^n)\subset\{\lambda^n\,|\,\lambda\in\rho(T)\}$. On a donc par (D.1)

$$r^n(T)\leq\|T^n\|\,.$$

Montrons l'inclusion inverse. Soit $|\lambda|>\|T\|$, alors

$$-(T-\lambda\mathrm{Id})^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}T^n\,.$$

Soit $\varphi \in E^*$ et $f(\lambda) := \varphi((T-\lambda \mathrm{Id})^{-1})$, alors par la proposition précédente $f$ est holomorphe dans $\rho(T)$ donc a fortiori dans $\{|\lambda| > \|T\|\}$. Donc pour un tel $\lambda$ on a le développement en série de Laurent

$$f(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} \varphi(T^n)\,,$$

et ce développement converge même pour $|\lambda| > r(T)$ puisque $f$ y est holomorphe. Donc si $|\lambda| > r(T)$, pour tout $\varphi \in E^*$ on a

$$\sup_{n \geq 0} \|\varphi(\lambda^{-n} T^n)\| < \infty\,.$$

On peut appliquer le théorème de Banach-Steinhaus dans $E^*$ à la famille de formes linéaires

$$\varphi \mapsto \varphi(\lambda^{-n} T^n)$$

et on trouve

$$\sup_{n \geq 0} \|\lambda^{-n} T^n\| < \infty\,.$$

On en déduit que si $|\lambda| > r(T)$ alors $\|\lambda^{-n} T^n\| \leq C(\lambda)$ et donc

$$\limsup_{n \to \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq |\lambda|\,.$$

Il suffit alors de prendre l'infimum de cette inégalité pour $|\lambda| > r(T)$ et le résultat suit. □

## D.2. Spectre des opérateurs compacts

**D.2.1. Structure spectrale des opérateurs compacts.** Le théorème suivant, dont la démonstration repose sur l'alternative de Fredholm ci-dessus, donne une description précise du spectre des opérateurs compacts.

**Théorème D.2.1** (Spectre des opérateurs compacts)**.** *Soit $E$ un espace de Banach de dimension infinie et soit $T \in \mathcal{K}(E)$. Alors*

*a)* $0 \in \sigma(T)$ *;*

*b)* $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_{\mathrm{p}}(T) \setminus \{0\}$ *;*

*c) soit* $\sigma(T) = \{0\}$*, soit* $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *est fini, soit* $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *est une suite qui tend vers zéro.*

Démonstration. a) Supposons que $0 \notin \sigma(T)$. Alors $T$ est bijectif et comme $T$ est compact on en déduit que $\mathrm{Id} = T \circ T^{-1}$ est compact en tant qu'opérateur sur $E$. En particulier $B_E$ est compacte ce qui implique que $E$ est de dimension finie par le Théorème de Riesz D.1.10.

b) Soit $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ et supposons que $\mathrm{Ker}(T - \lambda \mathrm{Id}) = \{0\}$. Alors d'après le théorème D.1.12 c) on a $\mathrm{Im}(T - \lambda \mathrm{Id}) = E$ donc $\lambda \in \rho(T)$, contradiction.

c) Commençons par montrer que tous les points de $\sigma(T) \setminus \{0\}$ sont isolés. Soit donc une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de valeurs propres de $T$, distinctes et non nulles, convergeant vers une limite $\lambda$ et montrons que $\lambda = 0$. Par définition et par b) il existe une suite de vecteurs non nuls $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $E$ tels que

$$(T - \lambda_n \mathrm{Id}) e_n = 0\,.$$

Soit $E_n := \mathrm{Vect}(e_k)_{1 \leq k \leq n}$. On montre par récurrence que les $e_n$ sont indépendants. En effet si ce résultat est vrai à l'ordre $k$ alors on suppose que

$$e_{k+1} = \sum_{\ell=1}^{k} \alpha_\ell e_\ell$$

et on a alors

$$0 = (T - \lambda_{k+1}\mathrm{Id})e_{k+1} = \sum_{1}^{k} \alpha_\ell(\lambda_\ell - \lambda_{k+1})e_\ell$$

et donc $\alpha_\ell = 0$ pour tout $1 \leq \ell \leq k$. La suite $(E_n)$ est donc strictement croissante, et on a $(T - \lambda_n \mathrm{Id})E_n \subset E_{n-1}$. Le Lemme D.1.11 permet de construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \in E_n$, et

$$\|x_n\| = 1 \quad \text{et} \quad d(x_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2} \cdot$$

Soit alors $2 \leq m < n$, on a donc $E_{m-1} \subset E_m \subset E_{n-1} \subset E_n$. On écrit alors

$$\|\lambda_n^{-1}Tx_n - \lambda_m^{-1}Tx_m\| = \|\lambda_n^{-1}(Tx_n - \lambda_n x_n) - \lambda_m^{-1}(Tx_m - \lambda_m x_m) + x_n - x_m\| \geq d(x_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$$

et comme $(Tx_n)$ admet une sous-suite convergente on ne peut pas avoir $\lambda_n \to \lambda \neq 0$.

Les éléments de $\sigma(T) \setminus \{0\}$ sont donc tous isolés et donc l'ensemble

$$\sigma(T) \cap \left\{\lambda \in \mathbb{C} \,/\, |\lambda| \geq n^{-1}\right\}$$

est soit vide soit fini (comme $\sigma(T)$ est compact, s'il avait une infinité de points distincts il aurait un point d'accumulation).

Enfin si $\sigma(T) \setminus \{0\}$ contient une infinité de points distincts, ils forment une suite qui tend vers 0. Le résultat est démontré. □

**D.2.2. Théorème spectral des opérateurs compacts auto-adjoints.** On se place dans le cas où $E = H$ est un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$. Alors grâce au théorème de représentation de Riesz A.4.5, on peut identifier $H^*$ à $H$ et donc $T^*$ à un élément de $\mathcal{L}(H)$.

**Définition D.2.2.** *Soit $H$ est un espace de Hilbert réel. On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est auto-adjoint si $T^* = T$, donc si*

$$(Tx|y) = (x|Ty) \quad \forall x, y \in H\,.$$

**Proposition D.2.3.** *Soit $H$ un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. On pose*

$$m := \inf_{\|x\|=1} (Tx|x) \quad \text{et} \quad M := \sup_{\|x\|=1} (Tx|x)\,.$$

*Alors*

$$\{m, M\} \in \sigma(T) \subset [m, M]\,.$$

Démonstration. Nous n'allons étudier que $M$, les propriétés correspondantes sur $m$ s'obtiennent en remplaçant $T$ par $-T$.

Soit $\lambda > M$, et montrons que $\lambda \in \rho(T)$. On sait que

$$(Tx|x) \leq M\|x\|^2 \quad \forall x \in H$$

et donc

$$\forall x \in H\,, \quad (\lambda x - Tx|x) \geq (\lambda - M)\|x\|^2$$

et le théorème de Lax-Milgram (Corollaire A.4.8) implique que $\lambda\mathrm{Id} - T$ est bijectif. En effet la forme bilinéaire

$$a(x, y) := (\lambda x - Tx|y)$$

est continue et coercive donc pour tout $z \in H$ il existe un unique $x \in H$ tel que

$$\forall y \in H\,, \quad (\lambda x - Tx|y) = (z|y)\,.$$

Montrons maintenant que $M \in \sigma(T)$. La forme bilinéaire

$$a(x, y) := (Mx - Tx|y)$$

est symétrique et l'on a
$$a(x,x) \geq 0 \quad \forall x \in H\,.$$
On peut donc appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz et il vient
$$|a(x,y)|^2 \leq a(x,x)a(y,y) \quad \forall x,y \in H$$
donc en l'appliquant à $y = Mx - Tx$ et en utilisant la continuité de $a$ on obtient qu'il existe $C$ telle que
$$\|Mx - Tx\|^2 \leq C(Mx - Tx|x) \quad \forall x \in H\,.$$
Soit maintenant $(x_n)$ une suite telle que
$$\|x_n\| = 1 \quad \text{et} \quad (Tx_n|x_n) \longrightarrow M\,.$$
Alors
$$\|Mx_n - Tx_n\| \longrightarrow 0\,.$$
Si $M \in \rho(T)$, alors
$$x_n = (M\,\mathrm{Id} - T)^{-1}(Mx_n - Tx_n) \longrightarrow 0\,,$$
contradiction. Donc $M \in \sigma(T)$. La proposition est démontrée. □

**Corollaire D.2.4.** *Soit $H$ un espace de Hilbert réel et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Si $\sigma(T) = \{0\}$ alors $T = 0$.*

Démonstration. D'après la proposition précédente on sait que
$$(Tx|x) = 0 \quad \forall x \in H\,.$$
En écrivant
$$2(Tx|y) = (T(x+y)|x+y) - (Tx|x) - (Ty|y)$$
on obtient le résultat cherché. □

Le théorème suivant est particulièrement important puisqu'il permet de diagonaliser les opérateurs auto-adjoints compacts.

**Théorème D.2.5.** *Soit $H$ un espace de Hilbert réel séparable et $T \in \mathcal{K}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact non nul. Alors $H$ admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de $T$.*

Démonstration. On note $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ la suite des valeurs propres distinctes de $T$, excepté 0, et on note $\lambda_0 = 0$. On pose $E_n := \mathrm{Ker}\,(T - \lambda_n \mathrm{Id})$. On sait que la dimension de $E_n$ est finie si $n \geq 1$ et que $E_0$ est éventuellement réduit à $\{0\}$ mais peut être de dimension infinie. Le théorème va suivre du fait que la famille $(E_n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de $H$.

Commençons par démontrer que les $E_n$ sont deux-à-deux orthogonaux. Soit $n \neq m$ et $(x,y) \in E_n \times E_m$. Alors
$$Tx = \lambda_n x \quad \text{et} \quad Ty = \lambda_m y$$
et donc
$$(Tx|y) = \lambda_n(x|y) = (x|Ty) = \lambda_m(x|y)$$
donc $(x|y) = 0$.

Montrons maintenant que l'espace vectoriel $F$ engendré par les $E_n$ est dense dans $H$. On a $T(F) \subset F$ et donc $T(F^\perp) \subset F^\perp$ puisque
$$\forall (x,y) \in F^\perp \times F\,, \quad (Tx|y) = (x|Ty) = 0\,.$$
Soit $T_0 := T_{|F^\perp}$, c'est un opérateur auto-adjoint compact et son spectre est réduit à 0 puisque $\sigma(T_0) \setminus \{0\}$ est constitué de valeurs propres de $T_0$ qui sont aussi des valeurs propres

de $T$ (un vecteur propre associé serait alors à la fois dans $F$ et dans $F^\perp$). Par le corollaire D.2.4 on a donc $T_0 = 0$. On en déduit que

$$F^\perp \subset \operatorname{Ker}(T) \subset F \quad \text{et} \quad F^\perp = \{0\}$$

donc $F$ est dense dans $H$. On construit une base hilbertienne en choisissant une base de chaque $E_n$ (de dimension finie pour $n \geq 1$ et grâce à la séparabilité de $H$ pour $E_0$). Le théorème est démontré. $\square$

## D.3. Spectre des opérateurs bornés auto-adjoints

On se place dans un cadre fonctionnel similaire au paragraphe précédent : $H$ est un espace de Hilbert (non nécessairement réel) et $T$ est un opérateur auto-adjoint dans $\mathcal{L}(H)$.

**Définition D.3.1.** *Une mesure à valeurs dans les opérateurs est une forme sesquilinéaire sur $H$ dans l'ensemble $\mathcal{M}$ des mesures boréliennes sur $\mathbb{C}$*

$$\begin{aligned} H \times H &\longrightarrow \mathcal{M} \\ (g,h) &\longmapsto \mu_{g,h} \end{aligned}$$

*continue au sens où pour tout compact $K$ de $\mathbb{C}$, il existe une constante $C$ telle que*

$$\forall f \in C(K)\,, \quad \forall (g,h) \in H \times H\,, \quad \big|\langle \mu_{g,h}, f\rangle\big| \leq C\|g\|_H \|h\|_H\,.$$

*On dit que $\mu$ est une mesure bornée à valeurs opérateur s'il existe une constante $C$ telle que*

$$\forall f \in C_0(\mathbb{C})\,, \quad \forall (g,h) \in H \times H\,, \quad \big|\langle \mu_{g,h}, f\rangle\big| \leq C\|g\|_H \|h\|_H\,,$$

*où $C_0(\mathbb{C})$ est l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{C}$ tendant vers zéro à l'infini.*

**Théorème D.3.2.** *Soit $T$ un opérateur auto-adjoint dans $\mathcal{L}(H)$. Alors il existe une unique mesure bornée $\mu$ à valeurs opérateurs vérifiant les propriétés suivantes :*

*a) Pour tout $(g,h) \in H \times H$, la mesure $\mu_{g,h}$ est supportée dans $\sigma(T)$.*

*b) Pour tout polynôme $P$ on a*

$$P(T) = \int_{\mathbb{R}} P(\lambda)\, d\mu(\lambda)\,.$$

*c) Pour tout borélien $E$ de $\mathbb{R}$ l'opérateur*

$$\mu(E) := \int_E d\mu(\lambda)$$

*est un projecteur orthogonal.*

Démonstration. Considérons l'équation différentielle ordinaire sur $\mathcal{L}(H)$

$$\frac{d}{dt} U(t) = iTU(t)\,, \quad U(0) = 0$$

dont la solution est l'exponentielle de $iT$ que l'on peut écrire sous la forme

$$e^{iT} := \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (iT)^n\,.$$

Alors $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe d'isométries et on remarque que $U^*(t) = U(-t)$. Soit l'opérateur

$$\delta_T : \quad \begin{aligned} L^1 \cap \mathcal{F}(L^1)(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{L}(H) \\ f &\longmapsto \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi T} \mathcal{F}f(\xi)\, d\xi\,. \end{aligned}$$

Alors

$$\|\delta_T(f)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \frac{1}{2\pi}\|\mathcal{F}f\|_{\mathcal{F}(L^1)(\mathbb{R})}$$

et

$$\delta_T(fg) = \delta_T(f)\delta_T(g)\,.$$

Par ailleurs

$$(\delta_T f)^* = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi T}\mathcal{F}\overline{f}(\xi)\,d\xi$$

donc si $f$ est à valeurs réelles, $\delta_T f$ est auto-adjoint. Soient $g, h$ dans $H$ est montrons que la distribution définie par

$$\langle \mu_{g,h}, f\rangle := (\delta_T(f)g|h)$$

définit une mesure bornée à valeurs opérateur sur $\mathbb{R}$, supportée dans $\sigma(T)$. Nous allons en particulier montrer qu'il existe une constante $C$ telle que pour toute fonction $f$ dans $C_0(\mathbb{C})$,

$$\|\delta_T(f)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq C\|f\|_{L^\infty}\,. \tag{D.4}$$

Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction à valeurs réelles telle que $\mathcal{F}\chi \geq 0$ et $\displaystyle\int \chi^2(x)\,dx = 1$ et soit $\theta := \chi^2$. Le théorème de Lebesgue implique que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi T}\mathcal{F}\theta(\varepsilon\xi)\mathcal{F}f(\xi)\,d\xi = \delta_T(f)$$

et par ailleurs on sait que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi T}\mathcal{F}\theta(\varepsilon\xi)\mathcal{F}f(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi T}e^{-i\xi\lambda}\mathcal{F}\theta(\varepsilon\xi)f(\lambda)\,d\lambda d\xi\,.$$

Supposons que le support de $f$ ne rencontre pas $\sigma(T)$. On remarque que

$$\frac{d}{d\xi}e^{i\xi T - i\xi\lambda\mathrm{Id}} = i(T-\lambda\mathrm{Id})e^{i\xi T - i\xi\lambda\mathrm{Id}}$$

et donc si $\lambda \notin \sigma(T)$ il vient

$$-iR(\lambda)\frac{d}{d\xi}e^{i\xi T - i\xi\lambda\mathrm{Id}} = e^{i\xi T - i\xi\lambda\mathrm{Id}}\,.$$

Après deux intégrations par parties il vient alors

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi T}e^{-i\xi\lambda}\mathcal{F}\theta(\varepsilon\xi)\,d\xi = -\varepsilon\int_{\mathbb{R}} R(\lambda)^2 e^{i\xi T}e^{-i\xi\lambda}(\mathcal{F}\theta)''(\varepsilon\xi)\,d\xi\,.$$

Si $f$ est supportée dans un ensemble compact $K$ de $\mathbb{R}\setminus\sigma(T)$, en faisant tendre $\varepsilon$ vers 0 on trouve que

$$(\delta_T(f)g|h) = 0$$

ce qui implique que le support de la distribution $\mu_{g,h}$ est inclus dans $\sigma(T)$. Montrons à présent que $(\delta_T(f)g|g) \geq 0$ si $f \geq 0$, ce qui montrera que $\mu_{g,g}$ est une distribution positive, et donc une mesure. On rappelle que

$$\langle \mu_{g,g}, f\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int\Big(\int (e^{i\xi T}g|g)e^{-i\xi\lambda}\mathcal{F}\theta(\varepsilon\xi)\,d\xi\Big)f(\lambda)\,d\lambda\,.$$

En notant que

$$\frac{1}{\varepsilon}\theta\Big(\frac{z-\lambda}{\varepsilon}\Big) = \frac{1}{2\pi}\int e^{i\xi z - i\xi\lambda}\mathcal{F}\theta(\varepsilon\xi)\,d\xi$$

on obtient

$$\frac{1}{\varepsilon}\theta\Big(\frac{T-\lambda\mathrm{Id}}{\varepsilon}\Big) = \frac{1}{2\pi}\int e^{i\xi T - i\xi\lambda\mathrm{Id}}\mathcal{F}\theta(\varepsilon\xi)\,d\xi\,.$$

En rappellant que $\theta = \chi^2$ avec $\chi$ à valeurs réelles on a

$$\Big(\theta\Big(\frac{T-\lambda \mathrm{Id}}{\varepsilon}\Big)u|u\Big) = \Big\|\chi\Big(\frac{T-\lambda \mathrm{Id}}{\varepsilon}\Big)u\Big\|_H$$

et donc pour tout $u \in H$ et toute fonction $f \geq 0$ dans $L^1 \cap \mathcal{F}(L^1)(\mathbb{R})$ on a

$$\int \Big(\int (e^{i\xi T}g|g)e^{-i\xi\lambda}\mathcal{F}\theta(\varepsilon\xi)\,d\xi\Big)f(\lambda)\,d\lambda \geq 0\,.$$

ce que l'on voulait démontrer. Montrons maintenant que

$$\langle \mu_{g,g}, f\rangle \leq C\|g\|_H^2\|f\|_{L^\infty}\,, \tag{D.5}$$

ce qui permettra de prolonger $\mu_{g,g}$ à l'espace des fonctions boréliennes bornées sur $\sigma(T)$. Soit donc $f_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $f_0 = 1$ dans un voisinage $V(T)$ de $\sigma(T)$ et soit $f \in L^1 \cap \mathcal{F}(L^1)(\mathbb{R})$ supportée dans $V(T)$. Alors on a

$$f \leq \|f\|_{L^\infty} f_0$$

donc

$$\langle \mu_{g,g}, f\rangle \leq \langle \mu_{g,g}, f_0\rangle \leq \|f\|_{L^\infty}$$

et donc

$$\langle \mu_{g,g}, f\rangle \leq C\|g\|_H^2\|f\|_{L^\infty}\,.$$

Enfin pour terminer la démonstration du théorème notons que

$$\int f(\lambda)g(\lambda)\,d\mu(\lambda) = \int f(\lambda)\,d\mu(\lambda)\int g(\lambda)\,d\mu(\lambda)$$

donc il suffit de démontrer que

$$\int d\mu(\lambda) = \mathrm{Id} \quad \text{et} \quad \int \lambda\,d\mu(\lambda) = T\,.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\varphi = 1$ sur un voisinage de $]-1;1[$ et soit $M > r(T)$. Alors en écrivant

$$\varphi_M := \varphi(\cdot/M)$$

on a

$$\int d\mu(\lambda) = \delta_T(\varphi_M) \quad \text{et} \quad \int \lambda\,d\mu(\lambda) = \delta_T((\cdot\varphi)_M)$$

et donc

$$\int d\mu(\lambda) = \frac{M}{2\pi}\int e^{i\xi T}\mathcal{F}\varphi(M\xi)\,d\xi \quad \text{et} \quad \int \lambda\,d\mu(\lambda) = \frac{iM}{2\pi}\int e^{i\xi T}\frac{d}{d\xi}(\mathcal{F}\varphi(M\xi))\,d\xi\,.$$

Autrement dit

$$\int d\mu(\lambda) - \mathrm{Id} = M\int (e^{i\xi T}-1)\mathcal{F}\varphi(M\xi)\,d\xi$$

et en intégrant par parties et en remarquant que $\varphi(0) = 1$ on a aussi

$$\int \lambda\,d\mu(\lambda) - T = TM\int (e^{i\xi T}-1)\mathcal{F}\varphi(M\xi)\,d\xi\,.$$

Mais

$$\Big\|M\int (e^{i\xi T}-1)\mathcal{F}\varphi(M\xi)\,d\xi\Big\|_{\mathcal{L}(H)} \leq M\|T\|_{\mathcal{L}(H)}\int |\xi||\mathcal{F}\varphi(M\xi)|\,d\xi$$

et le résultat suit en prenant la limite $M \to \infty$. □

## D.4. Spectre des opérateurs non bornés auto-adjoints

**Définition D.4.1.** *Soit $H$ est un espace de Hilbert. Soit $T : D(T) \subset H \to H$ un opérateur linéaire non borné à domaine dense.*

*On dit que $T$ est symétrique si*

$$\forall f, g \in D(T)\,, \quad (Tf|g)_H = (f|Tg)_H\,.$$

*On dit que $T$ est auto-adjoint si de plus $D(T^*) = D(T)$.*

Il existe dans ce cadre un analogue du Théorème D.3.2, que nous énonçons sans démonstration.

**Théorème D.4.2.** *Soit $T$ un opérateur auto-adjoint non borné sur $H$ de domaine $D(T)$. Alors il existe une unique mesure $\mu$ à valeurs opérateur vérifiant les propriétés suivantes :*

*a) Pour tout $(f, g) \in H \times H$, la mesure $\mu_{f,g}$ est supportée dans $\sigma(T)$.*

*b) On a*

$$T = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\mu(\lambda)\,.$$

*c) Pour tout borélien $E$ de $\mathbb{R}$ l'opérateur*

$$\mu(E) := \int_E d\mu(\lambda)$$

*est un projecteur orthogonal.*